René Lew,
août-novembre 2013,
Topologie

« La fiction de la surface dont la structure s'habille »[1]

Le 5 novembre 2013

Concepts et représentations de la topologie

Même s'il y a une marge de la topologie intuitive à sa mathématisation, en intégrer les données nécessite de réduire cette marge en allant dans le sens de l'intuition. Il s'agit — contre les tenants d'une topologie abstraite — d'en discuter les représentations, et à la base les concepts. De toute façon, l'on se doit de discuter de quel réel il s'agit, et comment telle représentation ou telle autre lui donne accès.

J'aborderai à une autre occasion la question de Lacan, présentée par lui comme « la topologie, réel ou métaphore ? », sous l'angle des liens conceptuels (voisinage, ouvert, fermé, compacité, connexité, continuité, etc.) avec les structures qu'ils engendrent et les modes de figuration qui en dépendent. C'est dire que je ne conçois pas l'objet topologique comme premier, même s'il est le plus prégnant[2], le plus intuitivement maniable et que Lacan nous a habitués à le manier comme faire se peut, au sens propre : au mieux en l'ayant en main. Le problème est que, si l'on ne rappelle pas de concept en la matière (c'est le cas de le dire), tel objet peut être leurrant à ne valoir que de façon analogique sans être exactement fondé à servir la psychanalyse, sauf peut-être à l'illustrer, et encore pas toujours adéquatement. Pour anticiper sur le propos que j'ai annoncé d'entrée, je fixerai les idées, en ce préambule, sur le concept de « voisinage » en ce qu'il rend compte (entre deux points) de ce lien particulier d'un signifiant à l'autre (récursivement fondateur de tout signifiant) que Lacan (après Freud : *Repräsentanz*) nomme « représenter » (*repräsentieren*), et dès lors des liens de proximité (le semblable, le prochain...) entre sujets.[3] Pour mémoire, les concepts d'*ouverture* et de *fermeture* sont traités en termes d'aliénation-séparation par Lacan dans « Position de l'inconscient », celui de *compacité*, rapporté à la sexuation, dans la première séance d'*Encore*...

Je me contenterai aujourd'hui de ponctuer (si possible et non définitivement) un débat poursuivi avec Claude Harder au-delà de sa discussion de l'an passé avec Jeanne Lafont, discussion dont je m'étais mêlé. Façon de travailler et de se répondre dans la lysimaque.

Aujourd'hui donc il s'agit pour moi de reprendre le schématisme topologique de la psychanalyse en passant des concepts à la structure et de la structure à sa vêture au travers des variétés topologiques qu'elle met en œuvre : nœuds, surfaces, graphes... (vêtir, travestir, investir...).

---

[1] J. Lacan, « L'étourdit », *Autres écrits*, Seuil, 2001, p. 484.
[2] Plus au sens dérivé d'« évident » qu'au sens premier de « gros de conséquences ».
[3] Le voisinage planaire d'un cercle donne un anneau (un disque troué), homéomorphe à un cylindre ; son voisinage tridimensionnel donne un tore volume ; mais une torsion de ce voisinage surface est une bande de Mœbius.

*

Le 2 août 2013

Je reprends donc posément un débat commencé en décembre 2012 avec Claude Harder. Au fond il concerne des questions de plongement et d'immersion.

Dans ce débat je suis prêt à aller à Canossa si les remarques critiques qui me seront sûrement faites sont convaincantes.

Il s'agit des modes de présentation de la structure. Mais je ne fais pas de celle-ci l'arrière-fond de mon propos. Je rappelle en effet que je tiens à une constitution d'abord conceptuelle du schématisme qu'on met en œuvre en trois étapes immédiatement superposées :

- (1) les schèmes conceptuels choisis,
- (2) l'agencement en schémas structuraux qui en donnent une morphologie d'ensemble,
- (3) la figuration (ou la « représentation » au sens mathématique, voir Marc Barbut, ou simplement la « présentation ») qui permet une appréhension quelque peu tangible de « l'abstraction » conceptuelle. Il va de soi que des choix de passage d'une étape à l'autre se présentent à tout moment. Et la solution apportée à ces remaniements n'est pas anodine. Pour moi, le fond du débat (à peine technique, toujours au sens mathématique) est là.

Je prendrai deux exemples litigieux comme assise de mon propos. L'un relatif au plongement (si faire se peut) du nœud trèfle dans le plan, la sphère, le tore. L'autre relatif à la ligne d'immersion du plan projectif P^2 selon ses diverses immersions (*cross-cap*, surface romaine, surface de Boy).

I

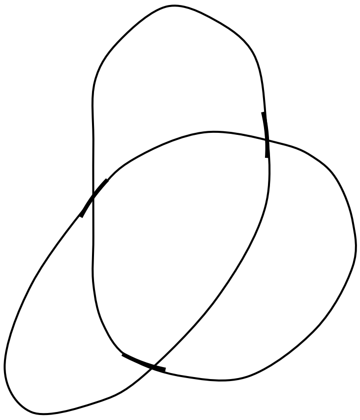
Je reprends donc ces questions à partir d'une remarque catégorique de Claude Harder sur le fait que mes assertions écrites (relatives à sa discussion avec Jeanne Lafont) ne tenaient pas en leur dernier ajout. Je redonne ici (en I.1) ce propos lapidaire, bien sûr trop marqué de ma conviction d'une évidence pas si immédiate que ça.

I.1

Le 1er novembre 2012

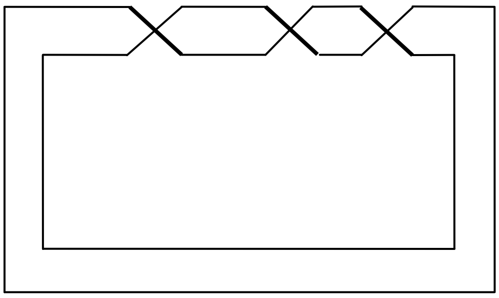
Je reprends les termes techniques du débat entre Jeanne Lafont et Claude Harder, tels que je les ai compris.

Pourquoi y a-t-il, à propos du nœud en trèfle, une différence entre



(1)

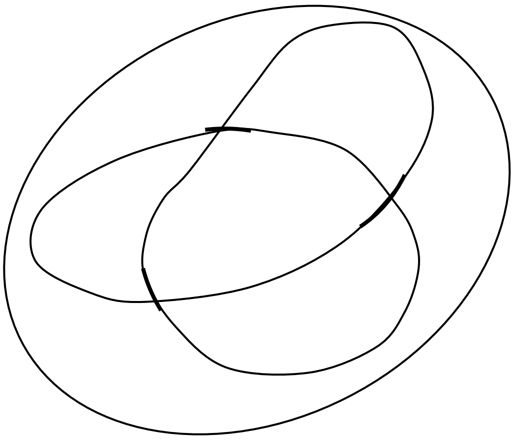
et



(2),

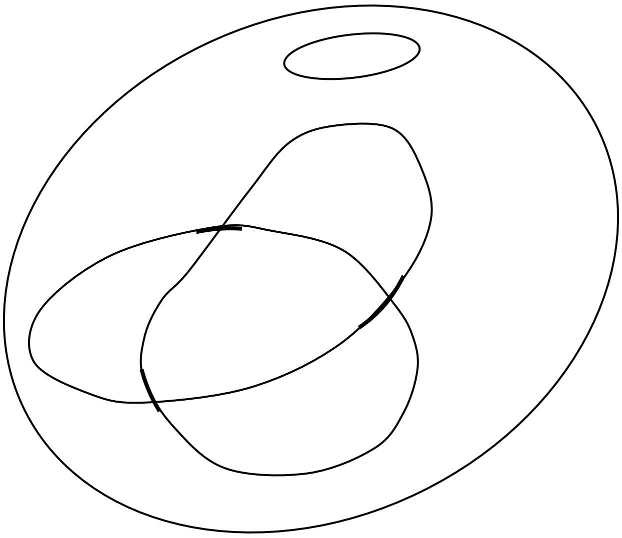
si l'on considère que (1) est plongé sur/dans une sphère S^2 et (2) sur/dans un tore T^2, étant entendu que le plan du tableau est une portion de sphère ou, tout autant, une portion de tore ? Quelle différence y a-t-il entre

(1a)

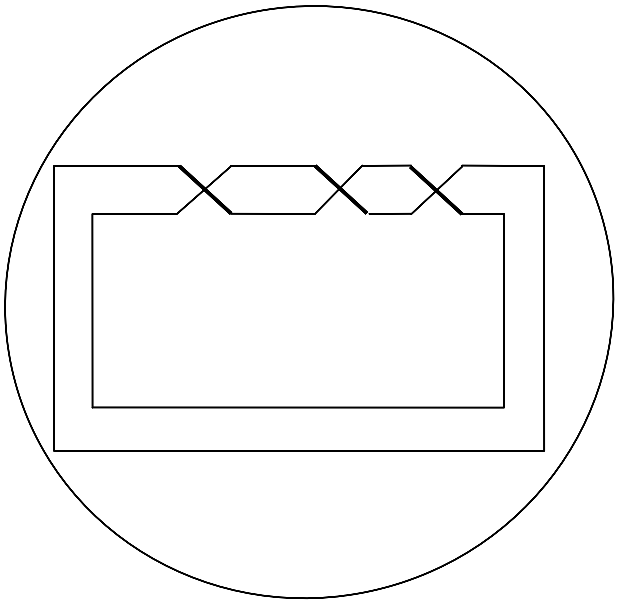


plongement sur la sphère

et

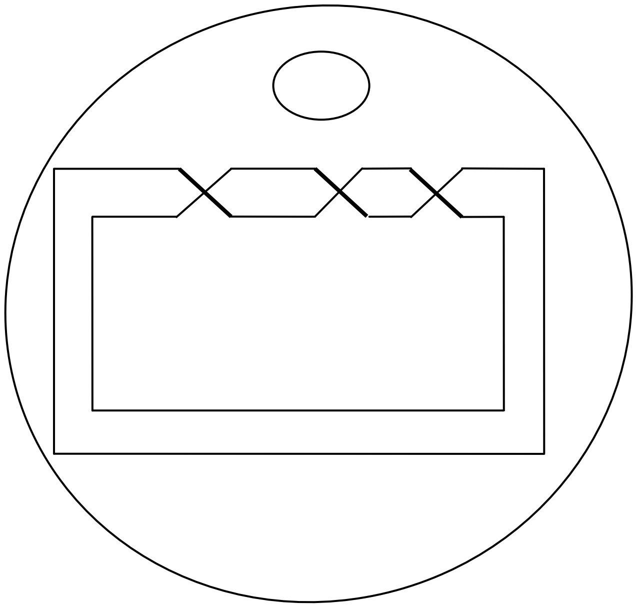
(1b)  *plongement sur le tore*

et entre



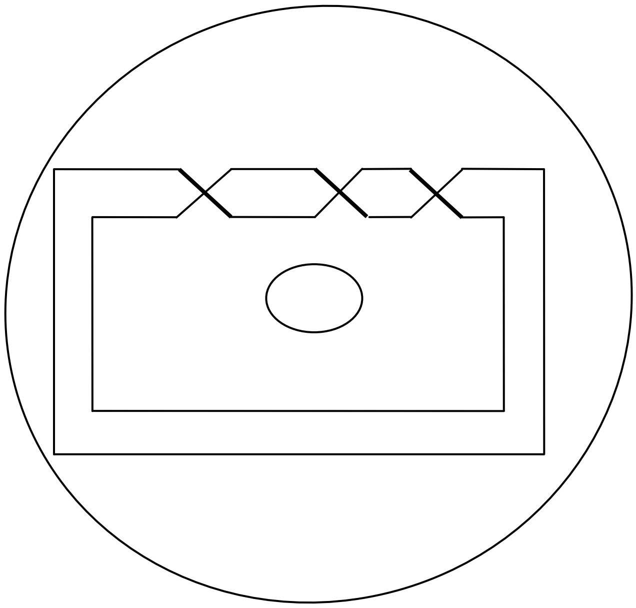
(2a),

et



(2b),

d’une part, et



(2c), d'autre part ?

Où se situe la différence éventuelle, si sphère S^2 et tore T^2 sont deux surfaces closes sans bord orientables (bilatères) ? Quelle différence y a-t-il entre ces plongements relativement au « trou extérieur » du tore ? Comment la fonction asphérique « incluse », mais inapparente, dans le tore joue-t-elle ici un rôle ?

I. 2

Le 2 avril 2013

Voici, reprise à ma façon, la remarque catégorique de Claude Harder.

— Mes figures (1) et (2) du texte précédent sont deux représentations du nœud trèfle. Ce sont deux figurations de la même structure,

— deux immersions, car il n'y a pas de plongement d'un tel nœud sur [dans] la sphère S^2 ou sur [dans] le plan (portion de sphère).

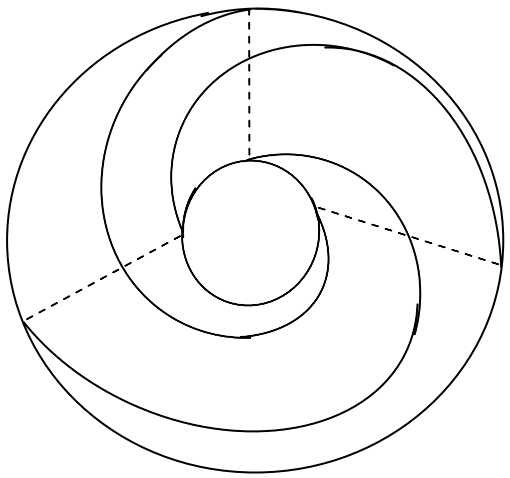
— Par contre, ce nœud peut être plongé sur [dans] un tore T^2 (surface) ou sur un 2-tore.

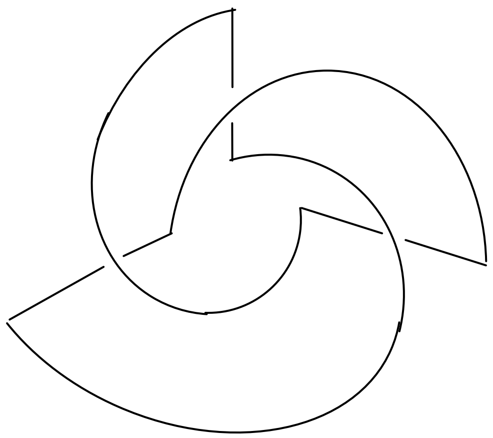
I.3

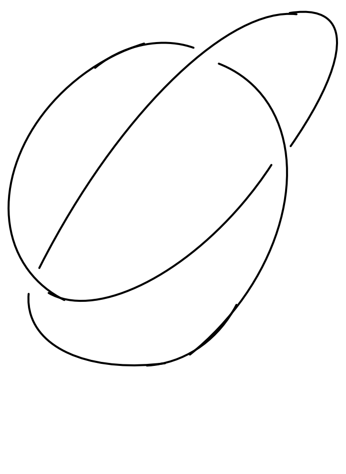
Le 2 août 2013

Il est vrai qu'il n'y a pas de strict plongement d'un nœud sur un plan (sphère) (sauf pour le nœud trivial = cercle). Mais ici je ne parle que de *représentation* (dessinée en dessus-dessous) d'un tel plongement. La représentation en est possible, quand le plongement ne l'est pas. Un pas est ici effectivement à franchir quand on passe à la figuration. À tout moment il s’agit de vérifier la congruence de la représentation avec la structure à laquelle elle donne accès.

Je me rapproche donc d’une figuration autrement acceptable du nœud trèfle plongé dans le tore T^2.







Avec cette figuration, J.-M. Vappereau (*Étoffe*, Topologie En Extension, p. 171) affirme qu'« il s'agit bien d'une seule courbe fermée, *correspondant au plongement d'un nœud à la surface du tore* » [je souligne, R.L.]. Évidemment on peut discuter du terme « correspondant ». Mais je souligne ici que J.-M. Vappereau ne répugne pas à parler de plongement sur le tore. En fait, pour permettre ce plongement il faut jouer du « trou » central, autrement que je ne l'avais fait.

Quelle est donc la différence avec mes schémas du § I.1 ? C'est que maintenant le plongement opère dans le tore avec une étoffe double, celle du devant et son prolongement derrière. (Les traits en pointillé indiquent des trajets sur la face cachée du tore.)

I.4

Le 5 novembre 2013

Il me faut donc admettre — pour suivre Claude Harder — que cette dernière figure ne se transforme pas en (n'est pas homéomorphe avec) ma figure 2c antérieure (au § I.1). C'est donc moins la question que je pose maintenant que celle que je résous ce faisant, car en 2c je n'utilise le « trou » central du tore qu'à en faire le tour du même côté de la surface. En fait pour obtenir un plongement correct, il faut admettre de lâcher le nœud trèfle à certains moments (traits pointillés), tout en passant par ce trou central, sur la face cachée (encore externe) du tore.

J.-M. Vappereau (sans plus de dessin) en vient, lui, à spécifier ce qu'il en est d'un tel trou du tore (*loc. cit.*, p. 164-165). Notons avec lui que « de manière intrinsèque le tore n'a pas de trou ». Il faudrait citer tout ce paragraphe de la page 164. Je ne le reprends pas ici. C'est néanmoins une question de rétraction en un point. Celle-ci est bien sûr impossible, si l'on fait le tour du trou central. De là la tenue du nœud trèfle dans la présentation de § I.3. Dans ces deux pages, J.-M. Vappereau souligne, avec la différence intrinsèque/extrinsèque, ce qu'il en est d'un trou réductible ou justement pas.

I.5

Le 16 novembre 2012

La récursivité est une présence de l'absence. Elle est un trou symbolique, une façon, sinon *la* façon, de constituer le symbolique. Ensuite la question est de savoir comment border imaginairement le trou (si nécessaire, car il existe des surfaces sans bord, inorientables, qui ne bordent pas le trou — puisque leur espace *en apparence* interne est en continuité avec leur espace *en apparence* externe et cela extrinsèquement). Les qualités des figurations extrinsèques de la structure ne correspondent cependant pas nécessairement à ce qu'est intrinsèquement celle-ci.

Ces surfaces inorientables sans bord ne sont pas plongeables dans l'espace euclidien standard tridimensionnel, car il est sphérique, et non plus dans sa mise à plat en dimension 2 (par trouage) sur un plan qui vaut portion de sphère. (Passage du volume à la surface, puis à la surface trouée.)

Mais l'on ne peut saisir cette impossibilité qu'à la *forcer* en plongeant néanmoins la surface asphérique dans l'espace 3D standard de l'imaginaire ou dans l'espace 2D de la feuille ou du tableau. Ce forçage n'est évidemment pas sans introduire de distorsions — ce sont des artefacts de représentation. Ceux-ci nous empêchent souvent de saisir les transformations relatives à l'espace de plongement. Ainsi en est-il du groupe fondamental de la surface intrinsèque considérée et inaccessible à l'imaginaire, un groupe distinct du groupe fondamental de la surface plongée dans l'espace imaginaire (sphérique, 3D) commun et qui s'avère être celui de l'espace ambiant, tel qu'on peut le représenter par un lacet passant dans chaque trou extrinsèque. Le point de vue extrinsèque est celui de l'espace imaginaire, nécessaire quoi qu'il en soit. Encore faut-il prolonger ce propos en donnant une définition de chaque type de trou. Je ne vais pas plus loin ici à cet égard.

*

Je pense que pour une part le reproche (peu explicite en fait) que Jeanne Lafont fit à Claude Harder est fondé sur ce problème de distorsion objet / espace de plongement, déterminants / représentations, intrinsèque / extrinsèque... Je l'ai déjà évoqué en termes de travestissement (travestir l'asphérique en sphérique) — mais aussi de garnissage (garnir une coupure avec un voisinage, c'est l'habiller). (Distorsion = *Entstellung*, travestissement = *Verkleidung*.) Mais il faut encore ici faire la différence entre (1) la transformation de la structure, explicite comme implicite, en sa représentation (*Darstellung* = présentation), elle proprement explicite sans plus, et (2) la transformation d'une représentation attendue pour sa cohérence avec la structure en une représentation travestissant la structure du fait de ne plus lui être adaptée.

*

Emporté par mon élan, j'ai donc essayé de dessiner (en I.1) la position critique de Jeanne Lafont, telle que je l'avais comprise. J'ai alors réévoqué des dessins, ceux de Claude Harder, ceux (supposés) de J. Lafont (qui s'en était expliquée verbalement) en leur adjoignant leur situation sur des portions de sphère planaires.

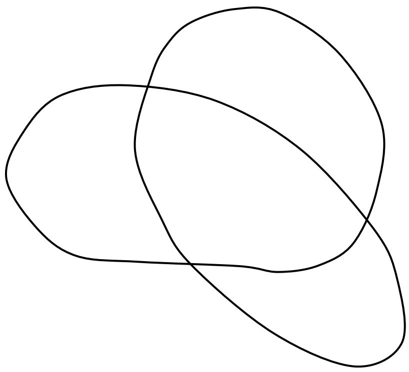
Et c'est ce que critique Cl. Harder. Il me fait remarquer qu'il n'y a pas *stricto sensu* de plongement possible du nœud trèfle sur la sphère, ni bien évidemment sur un plan (car le plan est une sphère ponctuée et étalée). Au sens strict, donc, il a raison. En pratique, — et c'est derechef un problème de présentation —, il n'a pas raison (mais je ne lui donne pas tort), car les surcroisements sont indiqués dans mes dessins avec l'usage qu'il a pris de les souligner (surligner, en fait) par des traits accentués. Dès lors je crains qu'on ne puisse récuser leur organisation planaire.

Le plongement sur un tore ou sur un 2-tore est par contre possible sans problème, à condition d'utiliser le trou central.

Après un premier mouvement de recul qui a suivi la remarque de Cl. Harder que mon propos ne tenait pas, j'y reviens pour le soutenir quand même.

On ne cesse pas de dessiner des nœuds — qui ne valent qu'en trois dimensions —, et cela ne fait pas problème. On les dessine sur des plans avec des artefacts de représentation (ici les traits accentués). Il semble donc que mon défaut serait d'avoir limité le plan par un trait circulaire ou d'avoir ajouté un cerne pour spécifier la place d'un trou, le nœud trèfle étant toujours représenté de façon planaire et quel qu'en soit le type de présentation (classique ou façon Griffiths).

Faudrait-il ne dessiner qu'en immersion ? En ombre portée ?



C'est effectivement une question d'éclairage. Le plongement peut être par exemple représenté en lumière rasante. Pour autant la question de J. Lafont est-elle invalidée ?

Le 19 juin 2010, à la lysimaque, Jean-Pierre Renaud soutenait qu'il existe différents types d'immersion. Il proposait (à côté de l'invasif, etc.) le terme de « pervasif ».

I.6

Novembre 2012

Je reprends les précisions qu'ajoute Claude Harder (à son mémo sur les familles de trèfle) en termes d'inscriptions (plongements) du trèfle (16 novembre 2012).

À chacun sa topologie — ou du moins son interprétation : « Selon moi, ... », dit Cl. Harder, il n'y a pas d'inscription du trèfle dans le plan. Et pourtant il dessine le trèfle dans le plan (ou une portion sphérique du tore) — même si le plongement de la surface de Boy n'est pas possible sans en défaire l'asphéricité. En fait il ne s'agit pas de l'espace 3D, point. Il s'agit de l'espace 3D sphérique. Mais à mon avis (à chacun, etc.) une surface de Boy (qui est un plan projectif de dimension 2 : P^2) est plongeable sans déformation dans un espace 3D asphérique — comme une sphère S^2 est plongeable dans une sphère S^3.

Le 12 novembre 2013

Il s'agit donc du tore T^2 plongé dans S^3 et du plongement du nœud trèfle dans T^2 (ou dans un 2-tore).

Avant d'aller plus loin, je rappelle en annexe 1 le mémo de Claude Harder reçu en date du 16 novembre 2012 (« Inscriptions (plongements) du trèfle », daté du 16 octobre 2012).

Toute la question concerne le retour de la présentation à la structure, d'abord *in abstracto,* ensuite selon les concepts qui supportent cette structure. Alors la question se complique de savoir en quoi le réel de cette structure (qu'elle ne puisse se prêter à n'importe quelle distorsion, autrement dit qu'elle résiste à tel travestissement) rend compte de, en impose à, contrevient à cet autre réel que les concepts — ici la psychanalyse — véhiculent. Même si on parle de la topologie comme métaphore, voire analogie, une fiction s'en construit qui n'est que le mythe des concepts enserrant le réel de la parole dans sa mise en œuvre psychanalytique.

Ainsi il faudra définir plongement et immersion (au § I.7) en lien avec les questions dites d'inscription. Comment celles-ci se recoupent-elles ? Aussi l'*inscription* récursive du plan projectif sur lui-même n'est-elle, à mon avis, qu'une affaire d'immersion, car cette inscription correspond (comment le dire autrement ?) à la ligne d'autotraversée. Autrement dit le plan projectif est récursif intrinsèquement. C'est dire que l'inscription se voulant récursive du plan projectif varie (1) selon les modes d'immersion de ce plan projectif, (2) eux-mêmes tributaires du mode d'organisation de ce plan projectif, toujours surface P^2, à partir de telle ou telle organisation mœbienne, étant entendu que la surface intrinsèque de toute bande de Mœbius (à 3, 5, 7, etc., demi-torsions) est la bande mœbienne à une seule demi-torsion.

Ici cette inscription concerne qui plus est les rapports de coupure entre eux (sur le plan projectif : ligne sans point ou point hors ligne ; sur le tore : en nœud trèfle par exemple). Avancer au sein d'une théorie de la coupure en termes de clivages (*Spaltungen*) divers est essentiel. Je me contente d'indiquer la *Spaltung* freudienne qui fait passage, en opposition à celle de Bleuler qui fait barrage et de là implique une position psychosée du sujet.

En le disant ainsi j'indique aussi que ces effets de coupure sont de l'ordre d'une séparation sujet / objet dans l'objectalisation du monde qu'est une surface (une variété) topologique. Lacan l'indique à propos du plan projectif dans « L'étourdit », à propos de la coupure (qu'elle soit équidistante du bord ou proche de lui) de la bande de Mœbius.

Au total, si les questions d'inscription sont mises à part, il s'agit proprement du plongement impossible, dans notre exemple, du plan projectif dans l'espace ambiant S^3. C'est précisément pour faire valoir et toucher ce réel du plongement impossible que les coupures interviennent, renversant ou non l'(in)orientation du plan projectif, mais le rendant plongeable dans l'espace ambiant, non comme tel, mais au travers de ses composants, portion de sphère et bande mœbienne.

I.7

Le 12 novembre 2013

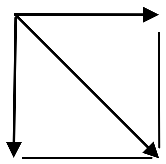
Je renvoie maintenant aux données standard (hors psychanalyse) concernant les plongements et les immersions (étudiés au III.1), car il n'est pas question d'élucubrer à partir de la seule psychanalyse sans confronter sa rationalité à l'exigence scientifique qu'autorise la récursivité que les surfaces non orientables représentent, en mettant en correspondance celles-ci avec les coupures qui les « entourent » en tant que nœuds en ce qu'ils sont pour les plus intéressants des résultats de coupure. (Ainsi de la triple surface mœbienne, à 3 torsions-plis, qu'enserre le nœud trèfle.)

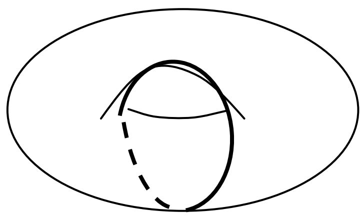
I.8

Le 12 novembre 2013

En conclusion de ce chapitre, disons que tout dépend du mode de métaphore qui assure *un même réel* entre la topologie qu'on utilise et l'éthique de la psychanalyse (soit la praxis de sa théorie). La difficulté s'accroît du fait que le réel n'est pas lui-même immédiatement accessible. Sans que ce soient là des problèmes en abîme, il s'agit pour le moins de plusieurs niveaux de questionnement fondés sur la même représentance, une représentance valant autant d'un point à l'autre (en topologie générale) que d'un signifiant à l'autre.

1. Quant à la fiction de surface, un bon exemple en est la bande de Mœbius feinte que Lacan réalise dans « L'étourdit » en « renversant » l'aplatissement du tore le long du cercle « tiers », ou résultant,

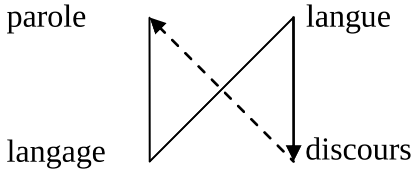




facilement oublié dans le décompte des cercles engendrants et engendrés du tore, un aplatissement « renversé » de son départ à son aboutissement.

Cette Mœbius feinte (qui n'est qu'un tore aplati avec renversement) ne vaut comme mœbienne que si l'on fait fi de sa double paroi (et du fait qu'un « bord » ici est un pli).

2. Les rapports objet / espace de plongement interfèrent bien entendu avec les apparences des objets. Ainsi on peut suivre un trajet plongeant la parole (fonctionnelle) dans le (champ du) langage et immerger celui-ci dans une langue (recelant l'ensemble des équivoques accumulées) pour tenir un discours qui soutienne en retour la parole.



*

II

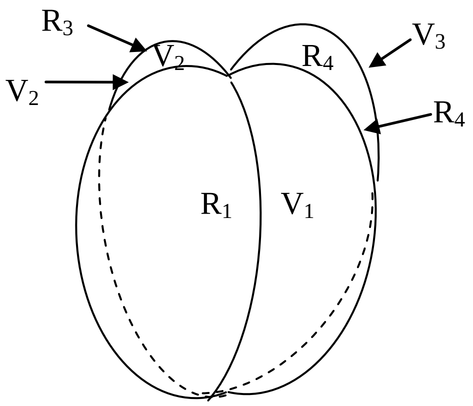
Ce débat sur l'immersion a été relancé par l'exposé suivant de Claude Harder à la lysimaque.

II.1

Le 15 avril 2013,
à la suite de l'intervention de
Claude Harder à la lysimaque le 13 avril 2013

Je reprends mes notes, je répondrai ensuite au courriel que Cl. Harder m'a envoyé à la suite de mes réticences à suivre son propos.

Cl. Harder part d'un *cross-cap,* immersion d'ensemble d'un plan projectif surface P^2 présentant une seule ligne d'immersion, car ce *cross-cap* est constitué de l'identification bord à bord d'une bande de Mœbius simple et d'un disque.[4] Ensuite il prolonge la ligne de décussation (ou d'immersion ou d'auto-traversée) du *cross-cap* pour qu'elle traverse tout ce *cross-cap*.[5] Cl. Harder soutient alors que c'est là une sphère auto-traversée. Pourquoi pas ? À condition de rappeler que cette sphère n'a plus rien de sphérique. Je dirais plutôt que c'est un objet inorientable, réductible à une bande de Mœbius.

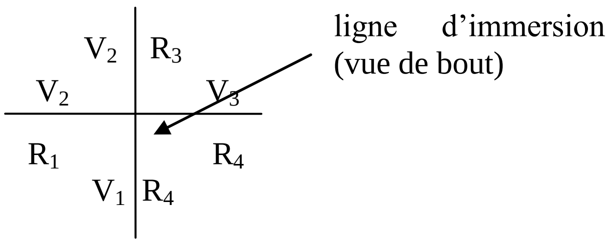


(les flèches visent les envers)

[4] Voir R.L., « Mise au point et questions sur une pseudo-équivalence du sphérique et de l'asphérique dans l'inconscient », *Cahiers de lectures freudiennes* n° 17, *Les racines de l'expérience*, Lysimaque, 1989.

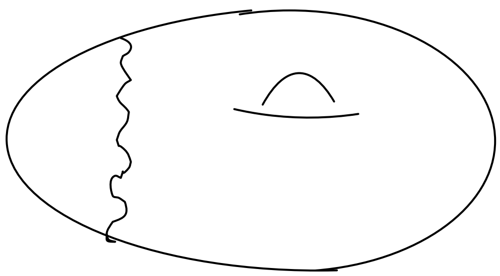
[5] Avec Lacan j'appelle *cross-cap* (bonnet croisé) l'ensemble de l'immersion du plan projectif, présentée comme distribuant de part et d'autre d'un (semblant d') équateur les parties données comme inorientable et orientable de cette immersion. Certains n'appellent *cross-cap* que la partie asphérique (inorientable) détachée de la calotte sphérique (orientable). Il va de soi qu'un plan projectif est homogène et qu'en tout point opère son inorientabilité (Lacan : réductible à une ligne sans point) et son orientabilité (Lacan : réductible à un point hors ligne). Tout point participe à la fois d'une LSP et d'un PHL. Si l'intérêt d'une bande de Mœbius est de jouer d'implicitation-explicitation, celui du plan projectif est de jouer d'équivalence entre des coupures qui maintiennent ou abolissent l'orientation du plan projectif, c'est-à-dire son inorientabilité.

Vue de dessus :



Dans le *cross-cap* la ligne d'immersion est un dièdre. (J.-M. Vappereau, *Étoffe*, Topologie En Extension, p. 305-306.)

Cl. Harder s'appuie sur les travaux de Jean-Pierre Petit. Il parle aussi de surfaces orientables avec auto-traversées, de surfaces standard et de surfaces non standard avec des immersions internes. (Ainsi du tore présentant une ligne d'immersion sur un côté.)



Je soutiens pour ma part qu'effectuer un tel auto-recoupement impose un changement du sphérique en asphérique.

II.2

Voici maintenant le mémo de Claude Harder qui suit son exposé (Mémo 1.2 : « Bonnet croisé » et « calotte croisée »). On le trouvera en annexe 2.

II.3
La sphère auto-traversée

(à partir de ce texte en fait vieux d'un an de Claude Harder, concernant
la différence entre « bonnet croisé » et « calotte croisée »)

Cl. Harder appelle « bonnet croisé » (comme Fréchet) « le plan projectif avec un trou ». C'est strictement la bande de Mœbius, puisque :

PP = bande de M + disque

– trou – trou

PP troué = bande de Mœbius, car un trou est l'enlèvement d'un disque, ou la restriction d'un disque sur un point qu'on ôte.

Trouer un plan projectif, c'est le ramener à une bande de Mœbius.

Cl. Harder s'intéresse à la partie supérieure (incluant la ligne d'auto-traversée causée par l'immersion) du *cross-cap* (dans sa présentation dessinée standard). Il l'appelle « calotte croisée ». Mais cette option de différenciation ne tient pas : cette calotte croisée est identique au plan projectif troué ; c'est une bande de Mœbius.

Pour étayer ce qui revient à amalgamer, Cl. Harder s'appuie là encore sur J.-P. Petit[6]. Je crains que ce que Cl. Harder appréhende du retournement de la sphère (sans la déchirer, sans perte de connexité) ne s'adapte pas à son propos relatif à la sphère auto-traversée.

II.4

Le 13 novembre 2013

Je commente maintenant ce mémo de Cl. Harder.

Le problème, attenant à la présentation de la ligne d'immersion (d'auto-traversée, de décussation...) prolongée de bout en bout de la « verticale » du *cross-cap* (ce qui revient — et c'est la question — à supprimer la partie présentée comme spécifiquement sphérique du *cross-cap*), le problème concerne le pseudo-bonnet croisé.

Pris autrement, le problème dépend du lieu de la suppression de la partie sphérique : au niveau du point bicuspidal « inférieur » (point Φ de Lacan), ce qui reste est assurément une bande de Mœbius, qu'on la présente comme auto-traversée ou non (puisque cette auto-traversée n'a plus de raison d'être ; c'est quoi qu'il en soit la marque de l'asphérique immergé dans le sphérique de l'espace de plongement 3D ; et comme le dit J.-M. Vappereau cité par

[6] J.-P. Petit et B. Morin, « Le retournement de la sphère », *Pour la science*, 1979, n° 15.

Cl. Harder : de toute façon la bande de Mœbius peut être non seulement immergée, mais plongée dans l'espace 3).

Ce point bicuspide (dit B, D par Cl. Harder à la suite de Fréchet qui lui-même reprend des figures antérieures[7]) est la pierre d'achoppement de la représentation. Cl. Harder s'intéresse — pour éviter toute confusion — à une coupe au-dessus de ce point. Je dis que le point Φ est litigieux, parce que dans le schéma de J.-M. Vappereau cité par Cl. Harder la partie sphérique subsistante est quand même dotée d'une part asphérique. De toute façon Cl. Harder est clair, il ne s'intéresse qu'à la partie supérieure, soit la bande de Mœbius, comme il le rappelle lui-même. Le litige tient (déjà à l'appellation qui fait équivoque, car « calotte croisée » fait penser à la calotte sphérique) au jeu de présentation de la partie « supérieure » du *cross-cap*. Cl. Harder la dit « orientable » quand elle a déjà été spécifiée comme bande de Mœbius, c'est-à-dire « inorientable ». Du coup il force la dose et rend équivalente cette calotte croisée avec la calotte assurément sphérique.

La part de sphère auto-traversée que Cl. Harder reprend de J.-P. Petit n'explique rien, si l'on ne prouve pas l'identité des portions d'objet (objets elles-mêmes) considérées. L'objet que Cl. Harder met ainsi en avant est un objet inorientable, connu comme le pseudo-bonnet croisé.

Ensuite reprenant le bonnet croisé (soit, je le rappelle, pour Cl. Harder, suivant Fréchet, le plan projectif troué), Cl. Harder en donne deux représentations fausses : celle de Fréchet qui conjoint encore une partie apparemment sphérique (mais c'est un semblant) après que le point (le disque, la calotte, l'hémisphère...) ait été ôté. C'est une présentation trompeuse qui n'est valide qu'à rappeler que localement la bande de Mœbius a une « part » sphérique (implicite) qu'une coupure longitudinale médiane révèle en implicitant alors la « part » asphérique de la bande mœbienne : jeu entre la bande extrinsèquement unilatère et la bande bilatère (entre l'inorientable et l'orientable intrinsèques) ; celle de Vappereau qui assure la même ambiguïté, mais depuis l'autre point de vue (sphérique cette fois), en persistant à couper au-dessus du point Φ. De là les mauvaises appréciations dessinées (reprenant les dessins de Vappereau et de Fréchet) de Cl. Harder.

Ce qu'il appelle calotte croisée (disque)	est en fait une bande de Mœbius
+	+
bonnet croisé (bande de Mœbius)	un objet trouble (voulant spécifier la part sphérique du plan projectif)

Le chiasme des appellations ne facilite pas la saisie du propos.
Cet objet trouble n'est qu'un effet de dessin, pas de structure car il semble associer à la fois une part encore asphérique à la part sphérique subsistante (si l'on ôte la partie « supérieure », uniquement et entièrement mœbienne, du *cross-cap*).

À mauvaise appellation, mauvaise conceptualisation, et mauvaise appréciation, puis mauvaise figuration, et de là mauvaise conclusion. L'association des deux calottes croisées de

[7] M. Fréchet et Ky Fan, *Introduction à la topologie combinatoire*, rééd. Gabay ; D. Hilbert et S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Topologie*, trad. anglaise : (*Visual Topology*) *Geometry and the Imagination*, Chelsea Publishing Company.

Cl. Harder, n'est que l'association bord à bord de deux bandes de Mœbius. Cela tient plutôt de la bouteille de Klein.

Emporté par des effets de dessin faisant subsister une ligne d'immersion inutile, en ce qui concerne la bande de Mœbius de toute façon plongeable en trois dimensions, Cl. Harder y reconnaît bien heureusement le pseudo-bonnet croisé. C'est une double bande mœbienne, à discuter plus avant dans le sens d'une bouteille de Klein. En fait ce n'est de toute façon pas de la structure de sphère qu'il s'agit, malgré l'apparence de boule.

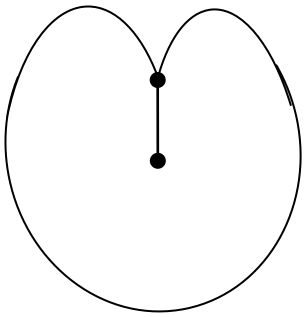
Au total, la dite sphère auto-traversée n'est que la reprise autrement dessinée de la bouteille de Klein non plus torique, mais sphérique — mais tout dépend des points bicuspides —, disons : une pseudo-bouteille de Klein.

*

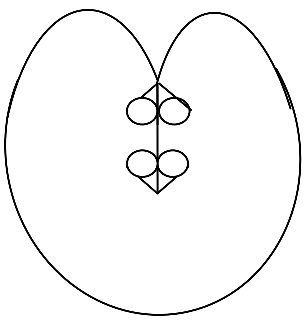
Discutons maintenant des références de Cl. Harder à P. Soury et M. Darmon.

1. Soury, *Chaînes, nœuds, surfaces*, transcrit par J. Lafont, p. 8.

Les points cuspidaux du *cross-cap* sont en fait des cônes en huit (8 ou ∞). Si l'on associe des cônes à ces deux points, mais dans le *cross-cap*[8],

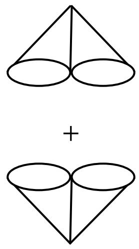


l'on obtient le dessin suivant



[8] Je rappelle simplement que ces points n'ont pas d'existence structurale, ce sont des artefacts de présentation dus à l'immersion du plan projectif réel dans S^3 (ou R^3).

où l'association



ne correspond de tout évidence (mais méfions-nous des évidences) qu'à la partie asphérique du *cross-cap*.

La question est donc : qu'est-ce qu'une sphère qui se traverse elle-même, sinon une pseudo-bouteille de Klein (laquelle bouteille de Klein est un tore tordu qui se traverse lui-même).

2. Darmon, *Essais sur la topologie lacanienne*, Éd. ALI, p. 434.

Il ne s'agit que de la monstration et non de la « démonstration » de l'équivalence entre le bonnet croisé (plan projectif dont un point, disque, hémisphère est ôté) et la bande de Mœbius.

Mais là encore le dessin est problématique, car ce « bonnet croisé » contient encore un artefact de dessin faisant croire que lorsqu'on a ôté la part sphérique il en subsiste encore un bout. C'est sûrement pour souligner l'importance de l'imaginaire. Et rappeler que, dans une bande de Mœbius, du sphérique existe localement, comme de l'asphérique, quand globalement tout est asphérique. (Localement le global s'oppose au local.)

Sur tout ça, voir ma présentation dans les *Cahiers de lectures freudiennes* n° 17 (*Les racines de l'expérience*) sur les rapports intension / extensions dans le plan projectif (commentaire de Lacan, « Proposition... », *in fine*) : « Mise au point et questions sur une pseudo-équivalence du sphérique et de l'asphérique dans l'inconscient » (1989).

II.5

Le 13 juin 2013

Une difficulté est inhérente au plongement / immersion en trois dimensions (dans l'espace ambiant) du plan projectif P^2 (surface). Ce plongement est impossible. On ne peut non plus le plonger, et d'autant moins, dans le plan (dessin en deux dimensions), sauf à l'ouvrir (le trouer, comme le fait Lacan dans les *Écrits*, p. 533, et couper transversalement la bande de Mœbius qui en résulte). Alors c'est à la fois d'un plan projectif troué (selon le point hors ligne) et coupé qu'il s'agit (moins selon la ligne sans point qu'orthogonalement à celle-ci) pour mettre à plat sans torsion effective (mais cette torsion persiste uniquement indiquée) la bande de Mœbius qui en est constitutive (alors limitée à une seule demi-torsion).

Quand Cl. Harder présente son *cross-cap* détaché de la « part » sphérique du plan projectif et qu'il prolonge ladite « auto-traversée » de la bande de Mœbius restante en la « dispensant » de son ouverture « centrale », reste à savoir de quel objet il s'agit.

*

III

Ces débats méritent d'être élargis au-delà de ces seuls exemples.

III.1

Plongement, immersion

Le 1er août 2013

À mon sens, plongements et immersions sont des présentations d'une variété topologique, c'est-à-dire un certain espace topologique, dans un autre espace topologique (autre — mais qui peut être de même variété, comme plonger une sphère volume S^3 (une boule pleine) dans l'espace ambiant). Une variété topologique est donc l'objectivation de la structure topologique d'un certain espace topologique. Un espace topologique est un ensemble de points, auquel on adjoint sa topologie, soit un certain choix de sous-ensembles participant de cet ensemble (le vide, le plein, la réunion des sous-ensembles choisis, et leur intersection deux à deux, ou au plus l'intersection d'un nombre fini de ces sous-ensembles).

Une telle structure topologique de dimension *n* peut être représentée au travers de son immersion dans un espace de dimension au moins *n–2*. (Par exemple : immersion de l'hypercube dont $n = 4$ dans la feuille $n = 2$, soit son dessin. Mais un tel dessin ne vaut que pour les arêtes ($n = 1$) ou les faces ($n = 2$), ce qui revient à ne plonger une variété que dans une autre de dimension au moins égale à celle-ci.)

On se trouve là confronté à toute restriction attenante à la représentation d'une quelconque structure.[9]

Les représentations d'une variété topologique en plongement ou immersion conduisent à des artefacts (des singularités surajoutées) variables. Ce sont aussi des conventions de représentation (figuration) de ce qu'est le principe retenu pour organiser la structure (schéma). Par exemple, un plongement d'un nœud le présente avec une interruption de certains traits (soulignant ainsi des arcs) pour rendre compte des dessus-dessous ; l'immersion d'un même nœud conduit à des intersections « à niveau », façon ombre portée.

Plus exactement, un plongement est un homéomorphisme d'un espace topologique dans un autre (ou de la variété de départ sur son image dans cet autre espace).

À défaut d'homéomorphisme, nous sommes dans le cas de l'immersion. (La représentation figurable n'est alors qu'un bidouillage convenu de ce qu'on attendrait d'un plongement.)

Les problèmes posés tiennent en particulier (1) à la définition des variétés en elles-mêmes, intrinsèquement, (2) à leur définition extrinsèque comme sous-variétés d'un espace vectoriel réel.

À noter que depuis Whitney (1935) les questions de plongement et d'immersion, à partir des singularités situées à leur bord, impliquent l'usage du théorème de Stokes dont j'ai fait récemment état à partir de Lacan (*Écrits*, p. 847).[10] Le problème reste donc celui des liens

[9] Relire Marc Barbut, « Sur le sens du mot « structure » en mathématiques », rééd. *Cahiers de lectures freudiennes* n° 10, Lysimaque.

[10] R.L., « Récursivité des négations », Copenhague, juin 2013.

entre le discret et le continu. J'en développe la thématique dans mon séminaire du lundi cette année 2013-2014.

Le 12 novembre 2013

Lacan utilise de telles singularités, toutes artificielles et structurellement fictives, dans sa représentation de l'immersion du plan projectif réel qu'est le *cross-cap*. Ces singularités (points bicuspides) n'assurent rien de conséquent, puisqu'elles ne sont que des artefacts de représentation. Mais si l'on s'interroge justement sur de tels effets tout imaginaires qui sont des distorsions de représentation, alors il y a moyen de pousser la conceptualisation de l'imaginaire jusqu'à ses conséquences réelles, opérant en retour sur la structure et de là sur les concepts (et donc l'ensemble du schématisme) dont cette structure dépend.

Je dirai que ces questions concernent la continuité homéomorphique d'une représentation à l'objet conceptuel auquel elle correspond. Si par contre une différence existe entre représentation et objet, rompant l'homéomorphisme, il faut pouvoir discuter de cette discontinuité pour l'intégrer de même dans la théorie qu'on vise à établir ainsi. En quelque sorte la représentation fait rupture (et discontinuité) vis-à-vis du (ou sur le) flux continu fonctionnel (compactifiant une faille) ; elle s'établit donc de façon discontinue, mais en permettant de compactifier tel de ses éléments, non plus d'un autre élément encore, mais d'une faille prise comme telle (cette fois c'est bien la faille qui compactifie le champ considéré).

Lacan n'utilise que des plongements et des immersions de variétés — qu'il met en œuvre au profit de leurs correspondances avec la psychanalyse — dans l'espace euclidien (standard, métré, sphérique) tridimensionnel. C'est précisément l'espace imaginaire auquel nous sommes habitués sans pour autant être tenus de nous limiter à lui, car tout dépend des choix signifiants qui y conduisent.

René Thom utilise de même les singularités des fonctions en petites dimensions.

De l'usage qu'on peut faire de ces singularités dans l'immersion (disons cette fois que ces points singuliers (doubles, triples...) sont l'image unique de points bien distincts dans la variété de départ), l'on tire une autre définition du plongement comme étant une immersion sans points multiples.

Toute la discussion avec Claude Harder quant aux surfaces inorientables ou orientables tient à cette difficulté : qu'on peut immerger des surfaces closes inorientables dans l'espace 3D standard, mais pas les plonger.

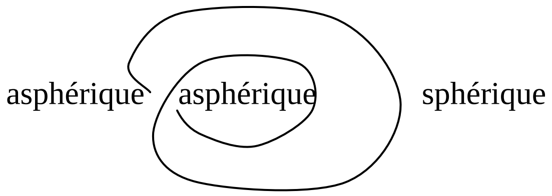
Reprenons alors la question des surfaces immergées dans l'espace 3D. Des surfaces « nodales » immergées dans l'espace 3 impliquent une projection en 2D qui n'est qu'une courbe immergée dans le plan, valant une immersion de nœud comme coupure (courbe de Jourdan) d'une telle surface. De même on peut projeter des surfaces « nodales » (plongées dans l'espace 4) dans l'espace 3 en les y immergeant. Inversement on ne peut pas repasser systématiquement d'une surface immergé dans l'espace 3 ambiant (et dessinée dans l'espace 2 du plan) à une surface plongée dans l'espace 4. Précisément certaines torsions de la surface peuvent l'empêcher. Je n'insiste pas ici sur les références techniques. Lacan développe imaginairement le point Φ en rondelle = came spiralée bilatère.

J'ajouterai que lorsqu'on transcrit un langage logique en un autre en en préservant les propriétés, on a affaire à une immersion du premier dans le second. Mais c'est alors plus d'une traduction ou d'une interprétation qu'il s'agit. On peut ainsi concevoir aussi en logique l'homéomorphisme d'un schématisme (d'une théorie) en un autre. Le langage des catégories permet de telles traductions. Il est même organisé pour permettre ces passages. Freud en joue dans « La dénégation » pour passer de *Lust / Unlust*, via intérieur / extérieur à bon / mauvais (« dans le langage des premières pulsions orales »).

*

Au total, la question est de revenir de la surface comme fiction à la structure qu'elle vêt. Vétille ? Non, ce n'est pas une mince affaire que de revenir de la fiction à la fonction.

Pour les concepts qui m'importent aujourd'hui, la question est de savoir par quels objets ou quels segments d'objet les représenter et comment présenter ceux-ci. Ainsi le concept d'évidement propre à Lacan ne peut-il coller à celui d'évidence. La fonction que ce concept d'évidement met en jeu ne peut se restreindre à l'état des choses de l'évidence. La littoralité entre de nombreux concepts se présente pour moi comme leur asphéricité : ils sont à la fois distincts et pourtant en continuité les uns avec les autres. En particulier cette asphéricité, à mon sens proprement symbolique, se met elle-même en continuité avec le sphérique de l'imaginaire :



L'évidement topologique qui y correspond fait valoir la mise en rapports dont s'articule le symbolique. Mais l'asphéricité est aussi le cas de l'intension et des extensions, de l'homogénéité et de l'hétérogénéité, de la métaphore et de la métonymie (*via* la synecdoque), etc. On saisit ici que cette continuité du sphérique et de l'asphérique peut être source d'erreur si on se contente de les opposer (cette fois sphériquement). L'intérêt de la topologie est de faire toucher (rendre tangible) la dialectique entre intérieur / extérieur, intrinsèque / extrinsèque, intension / extensions,... Encore faut-il tenir le discours correspondant à cette gageure dialectique : pas d'élément sans lien avec son opposé, pas d'élément sans lien avec cette négativité. La ligne de décussation du *cross-cap* rend cette gageure évidente — avec toutes les difficultés qui lui sont inhérentes. À parler de ligne d'auto-traversée on retrouve la récursivité de la signifiance qui n'est jamais que la définition du continuum discursif par le discontinu du contenu discursif qui lui est séquent. Cette influence du discret sur le continu est une affaire d'*enstasis*, soit de spécification du réel attenant à l'impossible considéré (ici le plongement d'une surface close inorientable dans l'espace ambiant). Cet impossible est défini par l'obstacle qui le détermine comme tel en opérant à l'encontre d'une fonction temporelle fondée de continuité. Il se donne précisément comme impossible à avoir induit (en un retour dialectique : *Wechselwirkung*, interaction) la rupture avec cette continuité. D'où la difficulté que rencontre la topologie à rendre compte d'une telle dialectique — surtout si cette topologie n'est pas présentée dans son mouvement, mais comme un état de fait statique.